Inhalt

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen für den 2-dimensionalen Fall

Für die Funktion $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ sollen Extremwerte bestimmt werden;
die Nebenbedingung lautet: $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 4 = 0$

Lösung der Aufgabe:

(1) Man bilde die Lagrangefunktion $L(x_1,x_2,\lambda) = f(x_1,x_2) + \lambda g(x_1,x_2)$
$g(x_1,x_2) = 0$ ist die Nebenbedingung, in diesem Fall ist $g(x_1,x_2) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 4$

(2) Man bestimme die Lösungen (x_1,x_2,λ) des Gleichungssystems
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$
d.h. man bestimmt Lösungen der Gleichung
$$gradL(x_1,x_2,\lambda) = (0{,}0{,}0)$$

(3) Hat man die Lösung (x_1,x_2,λ) gefunden, so untersucht man, ob (x_1,x_2) tatsächlich eine Extremstelle ist

Zu (1): $L(x_1,x_2,\lambda) = x_1x_2 + \lambda\left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 4\right)$

Zu (2): $gradL = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = \left(x_2 + 2\lambda x_1, x_1 + 2\lambda x_2, x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 4\right) = (0{,}0{,}0)$

Aus (2) folgen die Gleichungen

$$x_2 + 2\lambda x_1 = 0$$
$$x_1 + 2\lambda x_2 = 0$$
$$x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 4$$

Die dritte Gleichung beschreibt einen Kreis mit Radius 2.

Aus der zweiten Gleichung erhält man $x_1 = -2\lambda x_2$.

Zusammen mit der ersten Gleichung folgt $x_2 - 4\lambda^2 x_2 = 0, x_2 = 4\lambda^2 x_2$

Aus der dritte Gleichung folgt zusammen mit $x_1 = -2\lambda x_2$, dass $x_2 \neq 0$ sein muss.

Aus $x_2 = 4\lambda^2 x_2$ folgt dann $1 = 4\lambda^2, \lambda^2 = \frac{1}{4}$.

Damit hat man die Möglichkeiten $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Aus $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ folgt $x_1 = -x_2, 2x_1^{\ 2} = 4, x_1^{\ 2} = 2$

Aus $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ folgt $x_1 = x_2, 2x_1^{\ 2} = 4, x_1^{\ 2} = 2$

Auf dem Kreis $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 4$ ergeben sich als mögliche Lösungen:

$(x_1, x_2) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), f(x_1, x_2) = -2$

$(x_1, x_2) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), f(x_1, x_2) = -2$

$(x_1, x_2) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), f(x_1, x_2) = 2$

$(x_1, x_2) = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), f(x_1, x_2) = 2$

Da die stetige Funktion auf dem Kreis $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 4$ Maxima und Minima annimmt, folgt hieraus:

Die Funktion $f(x)$ nimmt in den Punkten $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ein Maximum an, und $f(x)$ nimmt in den Punkten $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ein Minimum an.