

Addition von Schwingungen

$$f_1(x) = A_1 \cdot \sin(\alpha x + \varphi_1), f_2(x) = A_2 \cdot \sin(\alpha x + \varphi_2)$$

$$f_1(x) + f_2(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \varphi)$$

Literatur-Referenzen: Wikipedia / Niedrig – Physik, Springer Lehrbuch 1992 / Bronstein

(Rechnung 1)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

Aufgabe 1

$3 \sin 2x + 4 \cos 2x = A \sin(2x + \varphi)$, man bestimme A und φ

Betrachte die Gleichung in der Form $a \sin 2x + b \cos 2x = A \sin(2x + \varphi)$

mit $a = 3, b = 4$

Anwendung der Additionstheoreme :

$$A \sin(2x + \varphi) = A(\sin 2x \cos \varphi + \cos 2x \sin \varphi) = a \sin 2x + b \cos 2x$$

$$\text{Durch Vergleich : } \cos \varphi = \frac{a}{A}, \sin \varphi = \frac{b}{A}$$

(Rechnung 2)

Verwendung des tan zur Bestimmung von φ : $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ und folglich

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.93$$

Bestimmung von A nach (Rechnung 1):

$$\cos(2x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), f_1(x) = a \sin(2x + 0), f_2(x) = b \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), a = 3; b = 4;$$

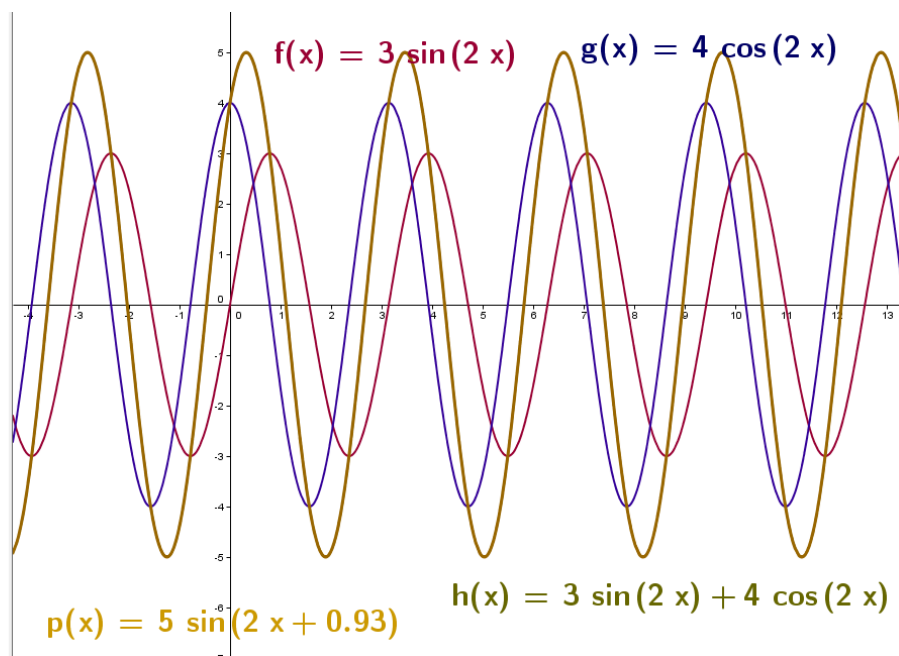
$$\Rightarrow A = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow A = \sqrt{25} = 5$$

Bestimmung von $\tan\varphi$ nach (Rechnung 1) :

$$\tan\varphi = \frac{a \sin 0 + b \sin \frac{\pi}{2}}{a \cos 0 + b \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{b}{a}, \text{ das gleiche Ergebnis wie bei (Rechnung 2)}$$

$$\tan\varphi = \frac{4}{3}; \varphi \approx 0,93$$



Die Funktionen $p(x)$ und $h(x)$ sind deckungsgleich.

Kritik an der Rechnung: Der Gebrauch der Tangensfunktion kann zu Fehlern führen, wenn man keine Einschränkungen an die Amplituden und Winkel macht.

Kritik an den Literatur-Referenzen: Das gilt auch für die oben angegebenen Formeln.

Im folgenden wird ein Beispiel angegeben, das fehlschlägt, wenn man die Formeln ohne Einschränkungen an die Winkel und Amplituden anwendet.

Vermutung: Ich vermute, die Verwendung des \tan funktioniert für positive Amplituden und Winkel zwischen 0° und 90° .

Ein Gegen-Beispiel für das kritiklose Anwenden der Formeln

$$f_1(x) = 3\sin(2x - \pi), f_2(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{13} \approx 3,61, \varphi \approx 0,59$$

Nach (Rechnung 1)

Für die Summenfunktion gilt aber

$$f_1(x) + f_2(x) = 3,61 \cdot \sin(2x - 0,59 - \pi) = A\sin(\alpha x + \varphi), \text{ also } \varphi = -0,59 - \pi$$

(nach GeoGebra)

3,61 ist dabei ein approximativer Wert für $\sqrt{13}$

Durchführung entsprechend (Rechnung 2)

$$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(2x), \sin(2x - \pi) = -\sin(2x)$$

=>

$$f_1(x) = -3\sin(2x), f_2(x) = 2\cos(2x)$$

Bei Anwendung des tan entsprechend (Rechnung 2)

$$a \sin 2x + b \cos(2x) = A \sin(2x + \varphi) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{b}{a}, A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

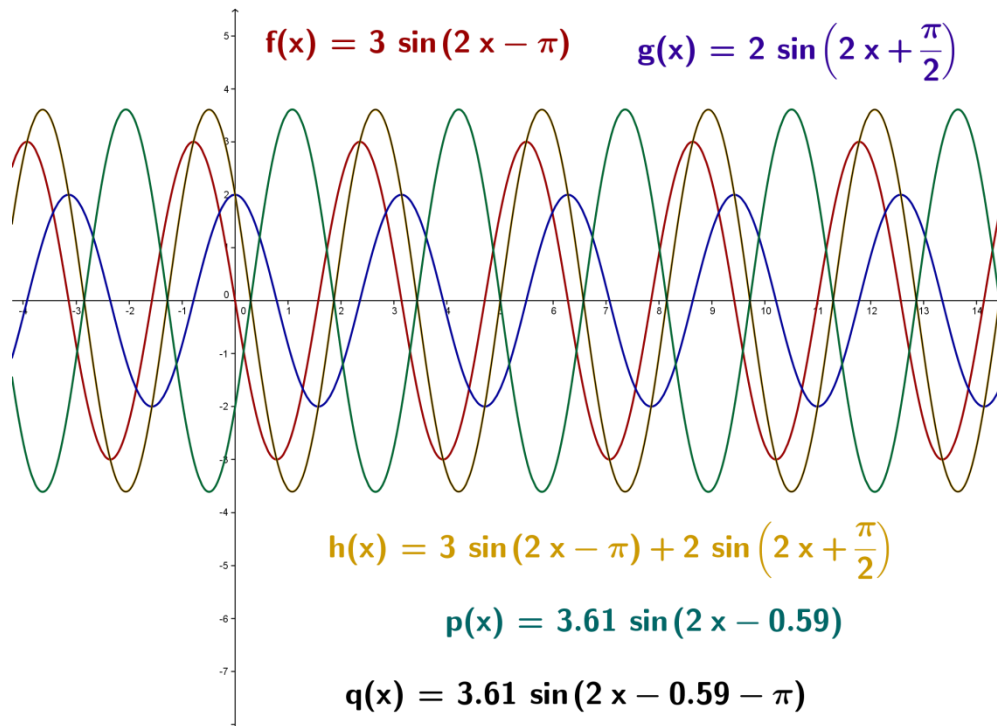
Die Berechnung von A ist korrekt; die Berechnung von φ über den Tangens ist fehlerhaft

$$\varphi = a \tan\left(-\frac{2}{3}\right) = -0,59, A = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3,61$$

Die Summenfunktion hat aber die Form

$$f_1(x) + f_2(x) = 3,61 \cdot \sin(2x - 0,59 - \pi) = A\sin(\alpha x + \varphi) \text{ mit } A = 3,61; \alpha = 2x; \varphi = -0,59 - \pi$$

Also führt auch meine Rechnung mit dem tan zu einem falschen Ergebnis.



Die Funktionen $q(x)$ und $h(x)$ sind deckungsgleich.

Übungsaufgabe

Berechnung der Ergebnisse ohne Verwendung des \tan , nur mit \sin und \cos .

$$f_1(x) = 3\sin(2x - \pi), f_2(x) = 2\cos(2x)$$

$$\sin(2x - \pi) = -\sin(2x); f_1(x) = -3\sin(2x)$$

gesucht ist

$$f_1(x) + f_2(x) = A\sin(2x + \varphi)$$

Die Amplitude A wird aus der vorangehenden Rechnung übernommen.

Bestimmung des Winkels φ durch Anwendung der Additionstheoreme

$$A\sin(2x + \varphi) = A(\sin 2x \cos \varphi + \cos 2x \sin \varphi) = -3\sin(2x) + 2\cos 2x, A = \sqrt{13}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich : } A \sin \varphi = 2; A \cos \varphi = -3;$$

$$\text{Es ist ein Winkel } \varphi \text{ zu bestimmen, so dass gilt : } \cos \varphi = \frac{-3}{\sqrt{13}} \approx -0.83, \sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0.55$$

Eine Lösung für $A\sin(2x + \varphi)$ liefert die vorangehende Graphik:

$$\varphi = -0.59 - \pi = -3.73$$

$$\text{genauer : } \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) - \pi = -3.73$$

für dieses φ gilt :

$$\cos(\varphi) = -0.83, \sin(\varphi) = 0.55$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Ergänzung zur Bestimmung des gesuchten Winkels:

$$\cos \varphi = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -0.83 \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right) = 2.55, \cos(2.55) = -0.83$$

$$\cos(2.55) = \cos(2.55 + 2\pi)$$

$$\cos(2.55) = \cos(2.55 - 2\pi) = \cos(-3.73)$$

$$\cos(-3.73) = -0.83, \sin(-3.73) = 0.55$$