Addition von Schwingungen

$$f_1(x) = A_1 \cdot \sin(\alpha x + \varphi_1),\; f_2(x) = A_2 \cdot \sin(\alpha x + \varphi_2)$$

$$f_1(x) + f_2(x) = A \cdot \sin(\alpha x + \varphi)$$

Literatur-Referenzen: Wikipedia / Niedrig – Physik, Springer Lehrbuch 1992 / Bronstein

(Rechnung 1)

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

Aufgabe 1

$3\sin 2x + 4\cos 2x = A\sin(2x + \varphi)$, man bestimme A und φ

Betrachte die Gleichung in der Form $a\sin 2x + b\cos 2x = A\sin(2x + \varphi)$
mit $a = 3, b = 4$
Anwendung der Additionstheoreme :
$A\sin(2x + \varphi) = A(\sin 2x\cos\varphi + \cos 2x\sin\varphi) = a\sin 2x + b\cos 2x$
Durch Vergleich : $\cos\varphi = \frac{a}{A}, \sin\varphi = \frac{b}{A}$
(Rechnung 2)
Verwendung des tan zur Bestimmung von φ : $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ und folglich

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.93$$

Bestimmung von A nach (Rechnung 1):

$$\cos(2x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),\ f_1(x)=a\sin(2x+0),\ f_2(x)=b\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right), a=3; b=4;$$

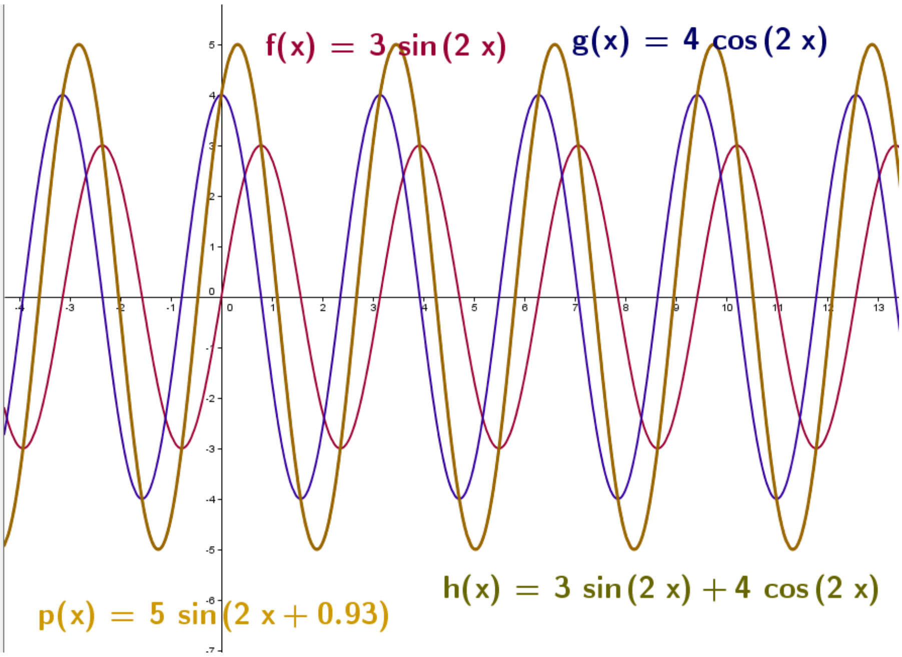
$$=> A=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$A=\sqrt{a^2+b^2} => A=\sqrt{25}=5$$

Bestimmung von $\tan\varphi$ nach (Rechnung 1):

$$\tan\varphi=\frac{a\sin 0+b\sin\frac{\pi}{2}}{a\cos 0+b\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{b}{a}, \text{das gleiche Ergebnis wie bei (Rechnung 2)}$$

$$\tan\varphi=\frac{4}{3}; \varphi\approx 0{,}93$$



Die Funktionen p(x) und h(x) sind deckungsgleich.

Kritik an der Rechnung: Der Gebrauch der Tangensfunktion kann zu Fehlern führen, wenn man keine Einschränkungen an die Amplituden und Winkel macht.

Kritik an den Literatur-Refenzen: Das gilt auch für die oben angegebenen Formeln.

Im folgenden wird ein Beispiel angegeben, das fehlschlägt, wenn man die Formeln ohne Einschränkungen an die Winkel und Amplituden anwendet.

Vermutung: Ich vermute, die Verwendung des tan funktioniert für positive Amplituden und Winkel zwischen 0° und 90°.

Ein Gegen-Beispiel für das kritiklose Anwenden der Formeln

$f_1(x) = 3\sin(2x - \pi),\ f_2(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

=> $A = \sqrt{13} \approx 3{,}61$, $\varphi \approx 0{,}59$

Nach (Rechnung 1)

Für die Summenfunktion gilt aber

$f_1(x) + f_2(x) = 3{,}61 \cdot \sin(2x - 0{,}59 - \pi) = A\sin(\alpha x + \varphi)$, also $\varphi = -0{,}59 - \pi$
(nach GeoGebra)

3,61 ist dabei ein approximativer Wert für $\sqrt{13}$

Durchführung entsprechend (Rechnung 2)

$$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(2x), \sin(2x - \pi) = -\sin(2x)$$

=>

$f_1(x) = -3\sin(2x),\ f_2(x) = 2\cos(2x)$

Bei Anwendung des tan entsprechend (Rechnung 2)

$$a\sin 2x + b\cos(2x) = A\sin(2x + \varphi) \Rightarrow \tan\varphi = \frac{b}{a}, A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

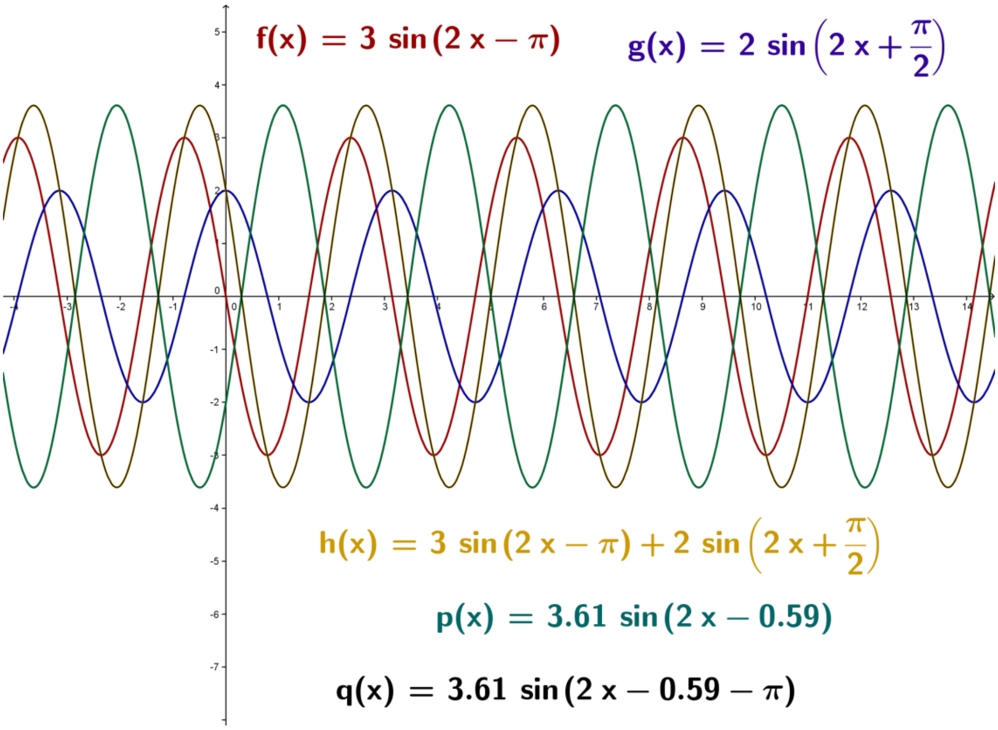
Die Berechnung von A ist korrekt; die Berechnung von φ über den Tangens ist fehlerhaft

$$\varphi = a\tan\left(-\frac{2}{3}\right) = -0{,}59, A = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$$

Die Summenfunktion hat aber die Form

$f_1(x) + f_2(x) = 3{,}61 \cdot \sin(2x - 0.59 - \pi) = A\sin(\alpha x + \varphi)$ mit $A = 3{,}61; \alpha = 2x; \varphi = -0{,}59 - \pi$

Also führt auch meine Rechnung mit dem tan zu einem falschen Ergebnis.



Die Funktionen q(x) und h(x) sind deckungsgleich.

Übungsaufgabe

Berechnung der Ergebnisse ohne Verwendung des tan, nur mit sin und cos.

$$f_1(x) = 3\sin(2x - \pi),\ f_2(x) = 2\cos(2x)$$

$$\sin(2x - \pi) = -\sin(2x);\ f_1(x) = -3\sin(2x)$$

gesucht ist

$$f_1(x) + f_2(x) = A\sin(2x + \varphi)$$

Die Amplitude A wird aus der vorangehenden Rechnung übernommen.

Bestimmung des Winkels φ durch Anwendung der Additionstheoreme

$$A\sin(2x + \varphi) = A(\sin 2x \cos\varphi + \cos 2x \sin\varphi) = -3\sin(2x) + 2\cos 2x,\ A = \sqrt{13}$$

Koeffizientenvergleich : $A\sin\varphi = 2; A\cos\varphi = -3;$

Es ist ein Winkel φ zu bestimmen, so dass gilt : $\cos\varphi = \frac{-3}{\sqrt{13}} \approx -0.83, \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0.55$

Eine Lösung für $A\sin(2x + \varphi)$ liefert die vorangehende Graphik:

$$\varphi = -0.59 - \pi = -3.73$$

$$\text{genauer}: \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) - \pi = -3.73$$

$$\text{für dieses } \varphi \text{ gilt}:$$

$$\cos(\varphi) = -0.83, \sin(\varphi) = 0.55$$

Damit ist die Aufgabe gelöst.

Ergänzung zur Bestimmung des gesuchten Winkels:

$$\cos\varphi = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -0.83 => \varphi = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right) = 2.55, \cos(2.55) = -0.83$$

$$\cos(2.55) = \cos(2.55 + 2\pi)$$

$$\cos(2.55) = \cos(2.55 - 2\pi) = \cos(-3.73)$$

$$\cos(-3.73) = -0.83, \sin(-3.73) = 0.55$$