Laplace Transformation

Definition

Der Funktion $f(t)$ entspricht die Funktion $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$

Setzt man $f(t) = t^n$, so erhält man über das Integral $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$F(s)$ ist die **Laplace-Transformierte** der Funktion $f(t)$.

Aufgabe: Bestimmung der Laplace Transformierten

Man bestimme die Laplacetransformierte der folgenden Funktionen:

Teil a

$f(t) = (3t)^5$

Es gilt: $\int_0^\infty (3t)^5\,e^{-st}\,dt = 3^5 \int_0^\infty t^5\,e^{-st}\,dt = 3^5\,\frac{5!}{s^6} = \frac{29160}{s^6}$

Ergebnis: $F(s) = \frac{29160}{s^6}$

Teil b

$f(t) = t^5\,e^{-3t}$

$F(s) = \int_0^\infty t^5\,e^{-3t}\,e^{-st}\,dt = \int_0^\infty t^5\,e^{-(3+s)t}\,dt = \frac{120}{(3+s)^6}$

Ergebnis: $F(s) = \frac{120}{(3+s)^6}$

Teil c

$f(t) = 5t^4\,;\, t^4 \rightarrow \frac{24}{s^5}\,;\, 5t^4 \rightarrow \frac{120}{s^5}$

Ergebnis: $F(s) = \frac{120}{s^5}$

Teil d

$f(t) = t^6\,;\, t^6 \rightarrow \frac{6!}{s^7}$

Ergebnis: $F(s) = \frac{6!}{s^7}$

Inverse Laplacetransformation

$$F(s) = \frac{3s^3 + 10s^2 - 8s + 12}{s^2(s^2 + s - 6)}$$

Man bestimme die inverse Laplace-Transformierte $f(t)$.

Es gilt: $s^2 + s - 6 = (s+3)(s-2)$

$$F(s) = \frac{3s^3 + 10s^2 - 8s + 12}{s^2(s+3)(s-2)}$$

Hierfür wird eine Partialbruchzerlegung durchgeführt und eine Zuordnungstabelle verwendet, die einer Funktion $f(t)$ ihre Laplacetransformierte $F(s)$ zuordnet.

Partialbruchzerlegung

$$F(s) = \frac{3s^3 + 10s^2 - 8s + 12}{s^2(s+3)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s+3)} + \frac{D}{(s-2)}$$

Multiplikation der Gleichung mit $s^2(s+3)(s-2)$ ergibt:

$$3s^3 + 10s^2 - 8s + 12 = As(s+3)(s-2) + B(s+3)(s-2) + Cs^2(s-2) + Ds^2(s+3)$$

Bestimmung der Koeffizienten A,B,C,D

B

$s = 0 \rightarrow 12 = B(-6)\,;\, B = -2$

Der Term $\frac{-2}{s^2}$ ergibt als inverse Transformierte $-2t$

Dabei wurde verwendet: $t^n \rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$

D

$s = 2 \rightarrow 24 + 40 - 16 + 12 = 20D\ ;\, 60 = 20D; D = 3$

Der Term $\frac{3}{(s-2)}$ ergibt als inverse Transformierte $3e^{2t}$

C

$s = -3 \rightarrow 45 = -45C\,;\, C = -1$

Der Term $\dfrac{-1}{(s+3)}$ ergibt als inverse Transformierte $-e^{-3t}$

A

Einsetzen von $s = 1$ ergibt $17 = -4A + 21\,;\, A = 1$

Der Term $\dfrac{1}{s}$ ergibt als Transformierte $t^0; t^0 = 1$

Zusammenfassung der Teilergebnisse

Die gesuchte Funktion lautet:

$f(t) = 1 - 2t - e^{-3t} + 3e^{2t}$