

Laplace Transformation

Definition

Der Funktion $f(t)$ entspricht die Funktion $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

Setzt man $f(t) = t^n$, so erhält man über das Integral $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$F(s)$ ist die **Laplace-Transformierte** der Funktion $f(t)$.

Aufgabe: Bestimmung der Laplace Transformierten

Man bestimme die Laplacetransformierte der folgenden Funktionen:

Teil a

$$f(t) = (3t)^5$$

$$\text{Es gilt: } \int_0^{\infty} (3t)^5 e^{-st} dt = 3^5 \int_0^{\infty} t^5 e^{-st} dt = 3^5 \frac{5!}{s^6} = \frac{29160}{s^6}$$

$$\text{Ergebnis: } F(s) = \frac{29160}{s^6}$$

Teil b

$$f(t) = t^5 e^{-3t}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} t^5 e^{-3t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} t^5 e^{-(3+s)t} dt = \frac{120}{(3+s)^6}$$

$$\text{Ergebnis: } F(s) = \frac{120}{(3+s)^6}$$

Teil c

$$f(t) = 5t^4; t^4 \rightarrow \frac{24}{s^5}; 5t^4 \rightarrow \frac{120}{s^5}$$

$$\text{Ergebnis: } F(s) = \frac{120}{s^5}$$

Teil d

$$f(t) = t^6; t^6 \rightarrow \frac{6!}{s^7}$$

Ergebnis: $F(s) = \frac{6!}{s^7}$

Inverse LaplaceTransformation

$$F(s) = \frac{3s^3 + 10s^2 - 8s + 12}{s^2(s^2 + s - 6)}$$

Man bestimme die inverse Laplace-Transformierte $f(t)$.

Es gilt: $s^2 + s - 6 = (s + 3)(s - 2)$

$$F(s) = \frac{3s^3 + 10s^2 - 8s + 12}{s^2(s + 3)(s - 2)}$$

Hierfür wird eine Partialbruchzerlegung durchgeführt und eine Zuordnungstabelle verwendet, die einer Funktion $f(t)$ ihre Laplacetransformierte $F(s)$ zuordnet.

Partialbruchzerlegung

$$F(s) = \frac{3s^3 + 10s^2 - 8s + 12}{s^2(s + 3)(s - 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + 3} + \frac{D}{s - 2}$$

Multiplikation der Gleichung mit $s^2(s + 3)(s - 2)$ ergibt:

$$3s^3 + 10s^2 - 8s + 12 = As(s + 3)(s - 2) + Bs(s + 3)(s - 2) + Cs^2(s - 2) + Ds^2(s + 3)$$

Bestimmung der Koeffizienten A,B,C,D

B

$$s = 0 \rightarrow 12 = B(-6); B = -2$$

Der Term $\frac{-2}{s^2}$ ergibt als inverse Transformierte $-2t$

Dabei wurde verwendet: $t^n \rightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$

D

$$s = 2 \rightarrow 24 + 40 - 16 + 12 = 20D; 60 = 20D; D = 3$$

Der Term $\frac{3}{(s - 2)}$ ergibt als inverse Transformierte $3e^{2t}$

C

$$s = -3 \rightarrow 45 = -45C; C = -1$$

Der Term $\frac{-1}{(s+3)}$ ergibt als inverse Transformierte $-e^{-3t}$

A

Einsetzen von $s = 1$ ergibt $17 = -4A + 21$; $A = 1$

Der Term $\frac{1}{s}$ ergibt als Transformierte t^0 ; $t^0 = 1$

Zusammenfassung der Teilergebnisse

Die gesuchte Funktion lautet:

$$f(t) = 1 - 2t - e^{-3t} + 3e^{2t}$$