Sprungziele innerhalb des Dokumentes
Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen

1.1 die reelle Zahl π

π ist ein Beispiel einer reellen Zahl, die keine rationale Zahl ist:
$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582319749445 9$
$230781640628620882148086513282306647093844609550582 23...$

Diese Darstellung der Zahl π bricht nicht ab, sie setzt sich unendlich fort. In anderen Worten: es gibt keine Möglichkeit, die Zahl π mit endlich vielen Dezimalziffern darzustellen. Die unendliche Folge der Ziffern ist darüberhinaus nicht periodisch.

Betrachte als Gegenbeispiel die Zahl $\frac{3}{7} = 0,428571428571428 57...$ Die Folge der Ziffern 428571 wiederholt sich.

2 Potenzen und Wurzeln

Wurzelausdrücke der Form $\sqrt[n]{a}$ mit einer geraden natürlichen Zahl $n > 1$ sind nur für $a > 0$ definiert. Dabei ist $\sqrt[n]{a}$ als diejenige nicht negative Zahl b definiert, für die gilt $b^n = a$.

Beispiel: $\sqrt[4]{16} = 2, 2^4 = 16$, $\sqrt[4]{-16}$ ist nicht definiert.

Für ungerade natürliche Zahlen $n > 1$ kann $\sqrt[n]{a}$ definiert werden.

Beispiel: $\sqrt[3]{-8} = -2, (-2)^3 = -8$

Es gibt allerdings auch Autoren, die Ausdrücke der Form a^r mit einer reellen Zahl r nur für reelle Zahlen $a > 0$ zulassen, damit die Potenzgesetze in einer allgemeinen Form gültig bleiben.

Anstatt $\sqrt[3]{-8}$ schreiben sie dann $-\sqrt[3]{8}$.

Potenzen der Form a^n sind für für beliebige reelle Zahlen $a \neq 0$ definiert. Damit hängt dann auch die Definition von Ausdrücken der Form $a^{\frac{n}{m}}$ mit natürlichen Zahlen n und m davon ab, ob m eine gerade oder ungerade natürliche Zahl ist.

Beispiele:

(1) Behauptung: $(-8)^{\frac{2}{3}} = 4$

Beweis:
$(-8)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4$

(2) $(-4)^{\frac{3}{2}}$ ist nicht definiert.

Begründung: Bei vorausgesetzter Gültigkeit der Potenzgesetzte wäre $(-4)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{-4})^3$
Aber $\sqrt[2]{-4}$ ist für reelle Zahlen nicht definiert.

Bemerkung:
Sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Für $\sqrt[2]{a}$ schreibt man $\sqrt{a}$.

3 Beweis der Betragsgleichung $|xa| = |x||a|$

Es wird die Beziehung $|xa| = |x||a|$ über Fallunterscheidungen bewiesen.

Dabei werden folgende Gesetzmäßigkeiten benutzt:

Sei a eine beliebige reelle Zahl.
Dann gilt $|a| = -a$ falls $a < 0$ ist und $|a| = a$ falls a größer oder gleich Null ist.

Im folgenden werden über die reellen Zahlen x und a Annahmen getroffen, unter denen die Beziehung $|xa| = |x||a|$ bewiesen wird. Dabei werden alle möglichen Fälle erfasst.

(1) Sei $x > 0$ und $a > 0$, dann ist auch $xa > 0$ und es gilt $|xa| = xa$. Andererseits erhält man in diesem Fall auch $|x| = x$ und $|a| = a$, also gilt $|xa| = |x||a|$. Damit ist die Beziehung $|xa| = |x||a|$ für diesen Fall bewiesen.

(2) Sei $x < 0$ und $a > 0$, dann ist $xa < 0$ und damit $|xa| = -xa$. Andererseits gilt $|x| = -x$ und $|a| = a$. Hieraus folgt $|a||x| = -xa = |xa|$

(3) Sei $x > 0$ und $a < 0$, dann ist $xa < 0$ und damit $|xa| = -xa$. Andererseits gilt $|x| = x$ und $|a| = -a$. Hieraus folgt $|a||x| = -xa = |xa|$

(4) Sei $x = 0$ oder $a = 0$. Dann folgt $|xa| = |0| = 0$ und $|x| = 0$ oder $|a| = 0$, damit ist dann aber auch das Produkt $|x||a| = 0$ und es folgt wieder $|xa| = |x||a|$.

4 Das Rechnen mit negativen Zahlen

Seien a, b, c beliebige reelle Zahlen, dann gelten folgende Gesetze und Darstellungskonventionen:

(1) $-(-a) = +a$, $-(+a) = -a$, $+a = a$, $+(-a) = -a$, $(-a)(b) = -ab$, $(-a)(-b) = ab$, $-a = (-1)a$, $ab = a \cdot b$, $a + (-a) = 0$

$(-c)(a) = (-c)a = -ca$, $(-c)(a+b) = (-c)a + (-c)b = -ca - cb = c(-a + (-b) = c(-a - b)$

(2) Seien a, b reelle Zahlen, $c > 0$ eine reelle Zahl, dann gilt

$a < b \Rightarrow (-c)a > (-c)b$

Beispiele:
$-(-4) = 4$, $-(+3) = -3$, $+6 = 6$, $+\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)$,
$(-6) \cdot (-6) = 6 \cdot 6 = 36$, $-25 = (-1) \cdot 25$

$4 < 5 \Rightarrow (-2) \cdot 4 = -8 > -10 = (-2) \cdot 5$

(3) $c(a+b) = ca + cb$, insbesondere erhält man für $c = -1$:

$(-1)(a+b) = (-1)a + (-1)b = -a - b$

Dabei wird folgende Darstellungskonvention benutzt: $(-1) \cdot a = (-1)a = -a$
Damit gilt dann auch $-(a+b) = (-1)(a+b) = (-1)a + (-1)b = -a - b$

Aus den vorangehenden Überlegungen folgt:

(4) $-(a+b) = -a - b$

(5) $-(a-b) = (-1)(a-b) = (-1)(a+(-b)) = (-1)a + (-1)(-b) = -a + b$

Bemerkung: Die Schreibweise ab bedeutet $a \cdot b$

Der Malpunkt wird oft weggelassen, wenn dabei keine Mehrdeutigkeiten entstehen können.

So kann man ihn z.B. bei $a \cdot b$ weglassen, $a \cdot b = ab$
bei $4 \cdot 3$ aber nicht, $4 \cdot 3 \neq 43$

5 Umformungen von Gleichungen und Ungleichungen

Seien a, b, c, d beliebige reelle Zahlen. Dann gelten folgende Gesetze:

(1) $a + b = c \Rightarrow (a+b) + d = c + d$

(1.a) $-a + b = c \Rightarrow (-a+b) + a = c + a$, $(-a+b) + a = (b + (-a)) + a = b + (-a + a) = b$
Dabei wurden das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz angewendet.

Kommutativgesetz: $(-a+b) = b + (-a)$

Assoziativgesetz: $(b + (-a)) + a = b + (-a + a)$

Zusammen ergibt sich: $-a + b = c \Rightarrow b = c + a$

5.1 Beispiel: $x - 3 = 10 \Rightarrow x = 13$

Es gilt $-(x-3) = (-1) \cdot (x-3) = (-1) \cdot x + (-1) \cdot (-3) = -x + 3$

Aus der Gleichung $-x + 3 = 10$ folgert man: $(-x+3) + (-3) = 10 + (-3) = 10 - 3 = 7$,
$(-x+3) + (-3) = -x + (3 + (-3)) = -x + (3-3) = -x$

Zwischenergebnis: $-x = 7$. Multiplikation mit (-1) ergibt $(-1) \cdot (-x) = (-1) \cdot 7$
$(-1) \cdot (-x) = x$, $(-1) \cdot 7 = -7$

Zusammen ergibt sich: $x = -7$
Seien a, b, c beliebige reelle Zahlen. Aus $a \leq b$ folgt dann $a + c \leq b + c$

5.2 Beispiel: $x + 2 \leq 5$

$x + 2 \leq 5 \Rightarrow (x+2) + (-2) \leq 5 + (-2)$

$(x+2) + (-2) = x + (2 + (-2)) = x + (2-2) = x$, $5 + (-2) = 5 - 2 = 3$

Zusammen: $x + 2 \leq 5 \Rightarrow x \leq 3$

5.3 Beispiel $-x - 2 \leq 5$

$-x - 2 \leq 5 \Rightarrow (-x-2) + 2 \leq 5 + 2 \Rightarrow -x \leq 7$

Seien a, b reelle Zahlen mit $-a \leq b$

Dann gilt: $(-1)(-a) \geq (-1)b$

Es folgt: $a \geq -b$

Aus der Ungleichung $-x \leq 7$ folgert man daher $x \geq -7$

Beispiele:
$-5 \leq 3 \Rightarrow 5 \geq -3$,
$7 \leq 9 \Rightarrow -7 \geq -9$

Inhaltsverzeichnis