

# Vektoranalysis

Für Vektoren gibt es Zeilendarstellungen und Spaltendarstellungen. Beide Darstellungen werden im folgenden als gleichwertig betrachtet.

## Gradient

Sei  $f$  eine Funktion, die Elemente  $(x,y,z)$  aus dem  $\mathbf{R}^3$  auf Elemente in  $\mathbf{R}$  abbildet, d.h.  $f(x, y, z)$  ist ein Element von  $\mathbf{R}$ .

Der Gradient der Funktion  $f$ ,  $\text{grad } f$ , ist definiert als  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

Durch den Gradienten wird ein **Vektorfeld** definiert: der Gradient der Funktion  $f$  ordnet jedem Punkt  $(x,y,z)$  aus dem Definitionsbereich der Funktion  $f$  den Vektor

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \text{ zu.}$$

**Beispiel:** betrachte die Funktion  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  mit Definitionsbereich  $D(f) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$

Der Definitionsbereich der Funktion  $f$  ist die Oberfläche einer Kugel mit Radius 1, deren Mittelpunkt im Ursprung  $P(0,0,0)$  liegt. Man bezeichnet eine solche Kugel auch als Einheitskugel. Die Funktion  $f$  bildet jeden Punkt der Kugeloberfläche auf 0 ab.

Es gilt:

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\partial z} = 2z$$

Hieraus folgt für den Gradienten der Funktion  $f$ :

$$\text{grad } f = (2x, 2y, 2z)$$

Das Vektorfeld  $(2x, 2y, 2z)$  ordnet jedem Punkt  $P(x,y,z)$  auf der Oberfläche der Kugel den Ortsvektor  $\vec{x} = (2x, 2y, 2z)$  zu.

Der Vektor  $\vec{x} = (2x, 2y, 2z)$  steht in jedem Punkt  $P(x,y,z)$  der Kugeloberfläche senkrecht auf der Kugeloberfläche.

## Vektorfeld

Gegeben sei das Vektorfeld  $(F_1, F_2, F_3)$ . Das Vektorfeld ordnet jedem Punkt aus einer Teilmenge  $A$  des

$\mathbf{R}^3$  einen Vektor zu.

**Beispiel:** das Gradientenfeld im vorangehenden Beispiel, die Teilmenge A war auf die Oberfläche der Einheitskugel beschränkt. Vektorfelder können aber auch für den ganzen  $\mathbf{R}^3$  definiert sein.

Die Komponenten des Vektorfeldes  $(F_1, F_2, F_3)$  sind Funktionen, die Elemente  $(x, y, z)$  aus dem  $\mathbf{R}^3$  auf reelle Zahlen abbilden.

Zeilendarstellung des Vektorfeldes:  $(F_1, F_2, F_3)$

Spaltendarstellung des Vektorfeldes:  $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$

## Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes  $(F_1, F_2, F_3)$  ist definiert als  $\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

Die Divergenz ist kein Vektorfeld.

## Rotation

Für das Vektorfeld  $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$  ist die Rotation folgendermaßen definiert:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die Rotation ist ein Vektorfeld.

## Quellenfreies Vektorfeld $\vec{a}$

Ein Vektorfeld  $\vec{a}$  ist quellenfrei, falls gilt:  $\text{div } \vec{a} = 0$

## Konservatives Vektorfeld $\vec{F}$

Es existiert ein skalares Feld  $\Phi$ , so dass  $\vec{F} = -\text{grad } \Phi$  gilt.