Vektoranalysis

Für Vektoren gibt es Zeilendarstellungen und Spaltendarstellungen. Beide Darstellungen werden im folgenden als gleichwertig betrachtet.

Gradient

Sei *f* eine Funktion, die Elemente (x,y,z) aus dem $\mathbf{R}^3$ auf Elemente in **R** abbildet, d.h. $f(x,y,z)$ ist ein Element von **R**.

Der Gradient der Funktion *f*, grad *f* , ist definiert als $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Durch den Gradienten wird ein **Vektorfeld** definiert: der Gradient der Funktion *f* ordnet jedem Punkt (x,y,z) aus dem Definitionsbereich der Funktion *f* den Vektor

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ zu.

Beispiel: betrachte die Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ mit Definitionsbereich $D(f) = \{(x,y,z)|x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$

Der Definitionsbereich der Funktion *f* ist die Oberfläche einer Kugel mit Radius 1, deren Mittelpunkt im Ursprung P(0,0,0) liegt. Man bezeichnet eine solche Kugel auch als Einheitskugel. Die Funktion *f* bildet jeden Punkt der Kugeloberfläche auf 0 ab.

Es gilt:

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\partial z} = 2z$$

Hieraus folgt für den Gradienten der Funktion f:

grad $f = (2x, 2y, 2z)$

Das Vektorfeld **(2x,2y,2z)** ordnet jedem Punkt P(x,y,z) auf der Oberfläche der Kugel den Ortsvektor $\vec{x} = (2x, 2y, 2z)$ zu.

Der Vektor $\vec{x} = (2x, 2y, 2z)$ steht in jedem Punkt P(x,y,z) der Kugeloberfläche senkrecht auf der Kugeloberfläche.

Vektorfeld

Gegeben sei das Vektorfeld (F_1, F_2, F_3). Das Vektorfeld ordnet jedem Punkt aus einer Teilmenge A des

$\mathbf{R}^3$ einen Vektor zu.

Beispiel: das Gradientenfeld im vorangehenden Beispiel, die Teilmenge A war auf die Oberfläche der Einheitskugel beschränkt. Vektorfelder können aber auch für den ganzen $\mathbf{R}^3$ definiert sein.

Die Komponenten des Vektorfeldes (F_1, F_2, F_3) sind Funktionen, die Elemente (x,y,z) aus dem $\mathbf{R}^3$ auf reelle Zahlen abbilden.

Zeilendarstellung des Vektorfeldes: (F_1, F_2, F_3)

Spaltendarstellung des Vektorfeldes: $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$

Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes (F_1, F_2, F_3) ist definiert als $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$

Die Divergenz ist kein Vektorfeld.

Rotation

Für das Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ ist die Rotation folgendermaßen definiert:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_3}{\partial y} - \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die Rotation ist ein Vektorfeld.

Quellenfreies Vektorfeld $\vec{a}$

Ein Vektorfeld $\vec{a}$ ist quellenfrei, falls gilt: div $\vec{a} = 0$

Konservatives Vektorfeld $\vec{F}$

Es existiert ein skalares Feld Φ, so dass $\vec{F} =$ -grad Φ gilt.