Inhaltsverzeichnis

Matrizen, Gaußscher Algorithmus

1 Bestimmung der inversen Matrix

Auf dieser Seite werden Matrizen und Vektoren fett gedruckt, um sie von Zahlen zu unterscheiden.

Betrachtet wird das lineare Gleichungssystem

$$5x_1 + 6x_2 = 7$$
$$3x_1 + 4x_2 = 9$$

1.1 Erläuterungen zu Matrix Vektor Multiplikationen

Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

A ist die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems, **x** ist der Lösungsvektor.

Das lineare Gleichungssystem lässt sich als Matrix-Vektor-Multiplikation folgendermaßen schreiben

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
Das Operationssymbol zwischen der Matrix **A** und dem Vektor **x** wird in der Regel nicht angegeben.

1.1.1 Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Die Multiplikation der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit dem Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

für die Aufgabe bedeutet das:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis der Multiplikation soll den Vektor **b** ergeben.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

d.h. es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Vektoren sind gleich, wenn ihre Komponenten gleich sind.

Für die zuletzt angegebene Gleichung bedeutet das

$$\begin{array}{l} 5x_1 + 6x_2 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 = 9 \end{array}$$

Das ist aber genau unser ursprügliches Gleichungssystem.

Warum diese ganzen Überlegungen?

1.1.2 Bestimmung der Lösung des LGS über die inverse Matrix

Ich will zeigen, warum man über die inverse Matrix der Koeffizientenmatrix zu einer Lösung des Gleichungssystem kommen kann.

Wenn die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar ist, existiert die inverse Matrix $\mathbf{A^{-1}}$

Man kann nun die Gleichung $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ von links mit der Matrix $\mathbf{A^{-1}}$ multiplizieren

$$\mathbf{A^{-1}}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A^{-1}b}$$

Diese Multiplikation ist assoziativ, d.h. es gilt

$$\mathbf{A^{-1}}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{A^{-1}A})\mathbf{x}$$

Das Produkt $(\mathbf{A^{-1}A})$ ergibt die Einheitsmatrix. Im Fall dieser Aufgabe ist das eine Matrix, bestehend aus 2 Zeilen und 2 Spalten, die folgendermaßen aussieht:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der Einheitsmatrix mit dem Vektor $\mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ergibt den Vektor $\mathbf{x}$.

Die Gleichung
$$\mathbf{A^{-1}}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A^{-1}b}$$

reduziert sich somit zu

$$\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b}$$

Diese Gleichung soll verwendet werden, um die Aufgabe zu lösen.
Dazu muss zunächst die inverse Matrix $\mathbf{A^{-1}}$ zu $\mathbf{A}$ bestimmt werden.

Hierfür gibt es ein Lösungsverfahren, das im folgenden vorgestellt wird.

1.2 Bestimmung der inversen Matrix

Zu der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

ist eine Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

zu bestimmen, so dass folgendes gilt:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Elemente von $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ haben folgende allgemeine Form:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

1.2.1 Matrix-Matrix-Multiplikation

Die Matrix-Matrix Multiplikation zwischen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ist folgendermaßen definiert:

Man erhält das Element c_{ik} der Produktmatrix $\mathbf{C}$, indem man die i.Zeile von $\mathbf{A}$ mit der k.Spalte von $\mathbf{B}$ multipliziert.

Die i. Zeile von $\mathbf{A}$, $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \end{pmatrix}$ kann als Zeilenvektor aufgefasst werden, die k. Spalte von $\mathbf{B}$, $\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \end{pmatrix}$ als Spaltenvektor.
Die Multiplikation dieser beiden Vektoren ergibt das Skalarprodukt $a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k}$

Hieraus ergibt sich:

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$
$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$
$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$
$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$

Für die Multiplikation

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bedeutet dies:

$5b_{11} + 6b_{21} = 1$, erste Zeile von **A** mal erste Spalte von **B** ergibt $c_{11} = 1$
$5b_{12} + 6b_{22} = 0$, erste Zeile von **A** mal zweite Spalte von **B** ergibt $c_{12} = 0$
$3b_{11} + 4b_{21} = 0$, zweite Zeile von **A** mal erste Spalte von **B** ergibt $c_{21} = 0$
$3b_{12} + 4B_{22} = 1$, zweite Zeile von **A** mal zweite Spalte von **B** ergibt $c_{22} = 1$

Dieses Gleichungssystem ist zu lösen, um die inverse Matrix **B** zu **A** zu bestimmen.

1.2.2 Ein Verfahren zur Bestimmung der inversen Matrix

Man kann das Gleichungssystem zur Bestimmung der inversen Matrix **B** zu **A** simultan für die Unbekannten b_{ik} lösen, indem man folgendermaßen vorgeht:

Man schreibt die Einheitsmatrix rechts neben die Koeffizientenmatrix und formt die so erhaltene Doppelmatrix so um, das am Ende die Einheitsmatrix links steht. Rechts steht dann die inverse Matrix.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Erlaubte Umformungen sind

(1) Multiplikation einer Zeile mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl
(2) Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile
(3) Es ist auch erlaubt, eine Zeile mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl zu multiplizieren und zu einer anderen Zeile zu addieren, die Zeile selbst aber unverändert stehen zu lassen.

Umformen der zuletzt angegebenen Darstellung
(1) Multiplikation der ersten Zeile mit $+3$, der zweiten Zeile mit -5 ergibt

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 15 & 18 & 3 & 0 \\ -15 & -20 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Erläuterung zu der angegebenen Umformung:

Die erste Zeile der Doppelmatrix
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
ist ein Zeilenvektor, der folgendermaßen definiert ist

$$\left(\begin{array}{cccc} 5 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Multiplikation eines Zeilenvektors mit einer Zahl bedeutet komponentenweise Multiplikation mit dieser Zahl

$(+3) \cdot \left(\begin{array}{cccc} 5 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right)$ ergibt

$$\left(\begin{array}{cccc} 15 & 18 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Die zweite Zeile der Doppelmatrix lautet

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit -5 ergibt

$\begin{pmatrix} -15 & -20 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(2) Addition der ersten Zeile zur zweiten Zeile ergibt

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 15 & 18 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

Erläuterungen zu der angegebenen Umformung:

Es wird jetzt die Doppelmatrix
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 15 & 18 & 3 & 0 \\ -15 & -20 & 0 & -5 \end{array}\right)$$
betrachtet, die bei der Umformung unter (1) entstanden ist.

Die Zeilen der Doppelmatrix sind Zeilenvektoren. Die Addition von Zeilenvektoren erfolgt komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} 15 & 18 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & -20 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Warum gerade diese Umformungen?

Man will erreichen, dass auf der linken Seite der Doppelmatrix die Einheitsmatrix steht.
Die bisher erreichte Null steht schon an der richtigen Stelle.

(3) Muliplikation der zweiten Zeile mit $+9$ und Addition zur ersten Zeile ergibt

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 15 & 0 & 30 & -45 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

(4) Division der ersten Zeile durch 15 und der zweiten Zeile durch -2 ergibt

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Man hat auf diese Weise die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

bestimmt, sie lautet

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

2 Gaußscher Algorithmus

2.1 Beschreibung des Gaußschen Algorithmus an einer (3,3)-Matrix

Als Beispiel betrachte man das folgende lineare Gleichungssystem

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems sieht folgendermaßen aus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Man versucht die Koeffizientenmatrix auf eine obere Dreiecksgestalt zu bringen, d.h. unterhalb der Diagonalen stehen lauter Nullen.

Die obere Dreiecksgestalt einer (3,3) Matrix sieht folgendermaßen aus

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$$

Die Umformungen finden an der erweiterten Matrix statt. Dabei wird auch die Koeffizientenmatrix umgeformt.

Die erweiterte Matrix für das oben angegebene Gleichungssystem hat folgende Gestalt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Die erweiterte Matrix setzt sich zusammen aus der Koeffizientenmatrix und dem Ergebnisvektor des linearen Gleichungssystems.

Zulässige Umformungen sind

(1) Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl
(2) Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile
(3) Es ist auch erlaubt, eine Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl zu multiplizieren und zu einer anderen Zeile zu addieren, die Zeile selbst aber unverändert stehen zu lassen.

Falls während der Umformung 2 gleiche Zeilen der Koeffizientenmatrix entstehen, ist die Determinante der Koeffizientenmatrix Null. Das Lineare Gleichungssystem ist dann nicht eindeutig lösbar.

Als Endergebnis der Umformungen soll sich folgende Form ergeben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

Aus dieser Form kann man die Lösungen des Linearen Gleichungssystems direkt ablesen.

$c_{33} \cdot x_3 = d_3 \Rightarrow x_3$

$c_{22} \cdot x_2 + c_{23} \cdot x_3 = d_2 \Rightarrow x_2$

$c_{11} \cdot x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 = d_1 \Rightarrow x_1$

2.1.1 Anmerkungen zur Determinante des Linearen Gleichungssystems

Die erlaubten Zeilenumformungen einer Matrix beim Gaußschen Algorithmus werden hier noch einmal zusammengestellt:

(1) Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl
(2) Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile
(3) Es ist auch erlaubt, eine Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl zu multiplizieren und zu einer anderen Zeile zu addieren, die Zeile selbst aber unverändert stehen zu lassen.

Die Umformung (1) ändert die Determinante der Koeffizientenmatrix, die Umformungen (2) und (3) nicht. Die Determinante der resultierenden Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente.

Vertauscht man 2 Zeilen oder 2 Spalten der Koeffizientenmatrix, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix von Null verschieden ist.

Falls die Determinante der Koeffizientenmatrix Null ergibt, kann das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen haben oder unlösbar sein. Das muss im Einzelfall entschieden werden.

Für das Lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

ergibt sich folgendes:

Unlösbar wäre es z.B. für den Fall $c_{33} = 0$ und $d_3 \neq 0$.

3 Fehlerkorrekturen

3.1 27.08.2014

Paragraph: Ein Verfahren zur Bestimmung der inversen Matrix

Erlaubte Umformungen sind
... mit einer beliebigen Zahl

ersetzt durch

... mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl

Inhaltsverzeichnis